

Représentations mod. p de $GL_2(F)$ II (IV) (1h.30)

$F =$ extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p de degré f . Je rappelle que l'on essaie de généraliser la correspondance modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ à $GL_2(F)$. Dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$, on a vu que $\pi(p)$ est uniquement déterminée par la donnée du diagramme $(\pi(p)^{k_i}, \pi(p)^{I_i}, \text{can})$ où $\text{can} =$ injection canonique $\pi(p)^{I_i} \hookrightarrow \pi(p)^{k_i}$ et où $\pi(p)^{I_i}$ est vu comme représentation de $N = \langle IF^{\times}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \rangle$. On peut donc factoriser la correspondance en $\rho \xleftrightarrow{I = \text{Iwahori}} (\pi(p)^{k_i}, \pi(p)^{I_i}, \text{can}) \leftrightarrow \pi(p)$.

On essaie ^{maintenant} de construire un candidat pour le diagramme $(\pi(p)^{k_i}, \pi(p)^{I_i}, \text{can})$, au moins pour p suffisamment générique. Une condition est déjà $\text{soc}_k(\pi(p)^{k_i}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(p)} \sigma$ où $\mathcal{S}(p)$ est l'ensemble des poids de Diamond associés à p .

On a fixé un plongement $\overline{\mathbb{F}}_p \hookrightarrow E$ (resp \mathbb{F}_p)
corps résiduel de $\overline{\mathbb{Z}}_p$ corps des coefficients

Soit $\rho: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \rightarrow GL_2(E)$. On écrit $\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)}$ sous la forme:

cas irréductible:

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{i=0}^{f-1} (i+1)p_i} & 0 \\ 0 & \omega_f^{q(1)} \end{pmatrix} \otimes \omega_f^m$$

$0 \leq r_0 \leq p-1, -1 \leq r_i \leq p-2 \forall i \geq 1$

cas réductible:

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{i=0}^{f-1} (i+1)p_i} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \omega_f^m$$

$-1 \leq r_i \leq p-2 \forall i$

Définition: On dit que p est générique si:

- cas irréductible: $1 \leq r_0 \leq p-2$ et $0 \leq r_i \leq p-3 \forall i \geq 1$
- cas réductible: $0 \leq r_i \leq p-3$ et $(r_i) \neq (0, \dots, 0), (p-3, \dots, p-3)$.

La définition de généricité ne dépend pas du choix du plongement $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{C}$.

On ne considère dans la suite que des p génériques.

Lorsque p est générique et semi-simple, alors $|\mathcal{S}(p)| = 2^{\pm}$. La combinatoire qui va suivre s'effondre lorsque p n'est pas générique.

Je fixe p générique avec p agissant trivialement sur $\det(p)$.

Voici un candidat pour $\Pi(p)^{K_1}$:

Thm (Paskunas-B.) (i) Il existe une unique représentation $D_0(p)$ de $K/K_1 = GL_2(\mathbb{F}_q)$ de dim. finie sur E telle que:

- (a) $\text{soc}_K D_0(p) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(p)} \sigma$
 - (b) tout poids $\sigma \in \mathcal{S}(p)$ n'apparaît dans $D_0(p)$ que comme sous-objet
 - (c) $D_0(p)$ est maximal (pour l'inclusion) pour (a) et (b).
- (ii) La représentation $D_0(p)$ est sans multiplicité (dans ses facteurs de J.H.).
- (iii) Comme I-représentation ($I = \text{Inertiel}$), on a:

$$D_0(p)^I \cong \bigoplus_{\substack{\text{autres } (x, x^s) \\ x \neq x^s}} \mathbb{F}_p \chi \oplus \mathbb{F}_p \chi^s \quad \text{ou} \quad \chi: I \rightarrow E^x$$

$$\chi^s = \chi \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right).$$

La propriété (i) est vraie plus généralement lorsque $\mathcal{D}(\rho)$ est remplacé ^③ par un ensemble quelconque de poids distincts. Les propriétés (ii) et (iii) reposent sur la combinatoire des poids (même si elles sont probablement valables dans un cadre un petit peu plus général).

X: $F = \mathbb{Q}_p$ $\rho|_{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{r_0+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trouve: $D_0(\rho) = \begin{array}{c} \text{Sym}^{r_0} \text{---} \text{Sym}^{p+r_0} \otimes \det^{r_0} \\ \oplus \\ \text{Sym}^{p-3-r_0} \otimes \det^{r_0+1} \text{---} \text{Sym}^{r_0+2} \otimes \det^{-1} \end{array}$

$\rho|_{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \omega_2^{r_0+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{(r_0+1)/p} \end{pmatrix}$ on trouve: $D_0(\rho) = \begin{array}{c} \text{Sym}^{r_0} \text{---} \text{Sym}^{p-3-r_0} \otimes \det^{r_0+1} \\ \oplus \\ \text{Sym}^{p+r_0} \otimes \det^{r_0} \text{---} \text{Sym}^{r_0-2} \otimes \det \end{array}$

Dans les 2 cas, il s'agit bien de $\pi(\rho)^{K_1}$.

La propriété (iii) du Thm. permet d'étendre de manière unique l'action de \mathbb{I} sur $D_0(\rho)^{\mathbb{I}_1}$ en une action de $N = \langle \mathbb{I}F^\times, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \rangle$ en faisant agir p trivialement. Je note $D_1(\rho)$ la N -représentation qui en résulte. On considère maintenant tous les triplets:

$(D_0(\rho), D_1(\rho), r)$ où $r: D_1(\rho) \hookrightarrow D_0(\rho)$ est une injection \mathbb{I} -équivariante. On obtient ainsi ^{une famille de} diagrammes $D(\rho, r)$.

Lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, il y a toujours un nombre infini de $D(\rho, r)$ à isomorphisme de diagrammes près (je reviendrai là-dessus avec l'examen

du cas $f=2$ à la fin). Une façon équivalente de formuler les choses est ④ de fixer l'injection canonique $D_0(p)^{I_1} \xrightarrow{\text{can}} D_0(p)$ puis de considérer toutes les actions possibles de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ sur $D_0(p)^{I_1}$. En général, on ne peut pas passer d'une action à une autre par un I -isomorphisme de $D_0(p)^{I_1}$ qui s'étend en un K -isomorphisme $D_0(p) \xrightarrow{\sim} D_0(p)$.

X: $F = \mathbb{Q}_p$, $\rho \simeq \begin{pmatrix} \omega^{r_0+1} \text{nr}(\lambda) & 0 \\ 0 & \text{nr}(\lambda^{-1}) \end{pmatrix}$, $\lambda \in E^\times$. $\left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p}^G\right)^{I_1} \simeq \left(\text{ind}_{\mathbb{I}}^K\right)^{I_1}$

On peut montrer qu'il existe $f_1 \in \left(\text{Sym}^{r_0} \text{---} \text{Sym}^{p-1-r_0} \otimes \det^{r_0}\right)^{I_1}$ (resp. $f_2 \in \left(\text{Sym}^{p-3-r_0} \otimes \det^{r_0+1} \text{---} \text{Sym}^{r_0+2} \otimes \det^{-1}\right)^{I_1}$) tel que : et $f_1 =$ a son support ds \mathbb{I}

$$D_0(p)^{I_1} = \left(E \cdot \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_1 \oplus E f_1 \right) \oplus \left(E \cdot \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_2 \oplus E f_2 \right)$$

Posons $e_i := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_i$, les actions possibles de

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ sont données par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} e_i = \lambda_i f_i$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} f_i = \lambda_i^{-1} e_i$ pour tous les couples $(\lambda_1, \lambda_2) \in E^\times \times E^\times$. Sur $\pi(p)$, on a l'action

particulière $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} e_1 = \lambda f_1$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} f_1 = \lambda^{-1} e_1$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} e_2 = \lambda^{-1} f_2$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} f_2 = \lambda e_2$.

Donc il y a ici un diagramme privilégié de la famille (faisant intervenir λ)

③ Je fixe p générique avec p agissant trivialement sur $\det(p)$.

On a le premier théorème suivant :

⑤

Thm (Paskunas + B.) (i) Soit $D(p, r)$ un diagramme associé à p . Il existe une représentation lisse admissible π de G sur E telle que :

- (a) $\text{soc}_K \pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(p)} \sigma = \text{soc}_K D_0(p)$
- (b) $D(p, r) \hookrightarrow (\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can})$
- (c) π est engendré sous G par $D_0(p)$.

(ii) Si $D(p, r) \neq D(p, r')$ et si π et π' vérifient (a), (b), (c) de (i) pour resp. $D(p, r)$ et $D(p, r')$, alors $\pi \neq \pi'$.

Preuve: (i) a été démontré dans les exposés de Paskunas. Je montre (ii).

Soit π une représent^o de G sur E satisfaisant (a)

du (i).

On peut définir $D_0(\pi) =$ sous- K -représen-
-tation maximale (pour l'inclusion) de π^{K_1} telle que chaque
composante irréductible σ de $\text{soc}_K \pi$ n'apparaît que dans $\text{soc}_K D_0(\pi)$

(l'existence de $D_0(\pi)$ se montre par la même méthode que

l'existence de $D_0(p)$). On a toujours $D_0(\pi) \subseteq D_0(p)$. Si π

satisfait de plus (b), alors $D_0(\pi) = D_0(p)$. Supposons main-

-tenant $\pi \cong \pi'$, ^{(π, π' comme en (ii))} alors on a aussi $(D_0(\pi), D_0(\pi) \cap \pi^{I_1}, \text{can})$

$\cong (D_0(\pi'), D_0(\pi') \cap \pi'^{I_1}, \text{can})$, c'est-à-dire $D(p, r) \cong D(p, r')$,

ce qui est impossible. \square

la conjecture suivante a résisté jusqu'à présent aux contre-exemples :

Conjecture: Il existe une unique π lisse admissible vérifiant (a), (b) et (c).
Celle π est de plus telle que $D(p, r) = (\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can})$.

La conjecture est vraie pour $F = \mathbb{Q}_p$. Des calculs par ordinateur de Lassina Dembélé (sur les espaces de formes de Hilbert mod. p) montrent qu'il existe des π vérifiant $\pi^{\mathbb{I}_1} \cong D_0(\rho)^{\mathbb{I}_1}$ dans des cas où $F \neq \mathbb{Q}_p$. On peut aussi montrer $\pi^{\mathbb{I}_1} = D_0(\rho)^{\mathbb{I}_1}$ lorsque $\mathcal{S}(\rho)$ est réduit à un seul poids (ce qui arrive dans des cas p irréductible non scindée).

Qu'en est-il maintenant de la structure de π ?

hm (Park. + B.) (i) Supposons p irréductible, alors toute représentation (lisse admiss.) satisfaisant (a), (b), (c) pour un $D(p, r)$ est irréductible et est une supersingulière.

(ii) Supposons p scindée, alors il existe ^{pour chaque $D(p, r)$} une représentation satisfaisant (a), (b), (c) de la forme :

$$\pi \cong \pi_0 \oplus \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_{f-1} \oplus \pi_f$$

où π_0 et π_f sont des réts principales irréductibles et les π_i , $0 \leq i \leq f-1$ sont des supersingulières irréductibles, distinctes des supersingulières provenant des p irréductibles.

Idée de preuve: Contrairement au précédent, ce théorème utilise de façon essentielle le fait que F est non-ramifié. Je ne décris que les étapes. La preuve repose sur des calculs techniques que je "saute".

(i) - On a $D_0(\rho) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}(\rho)} D_{0,\sigma}(\rho)$ où $\rho \circ \sigma \neq \rho \circ \tau$ $\Rightarrow D_{0,\sigma}(\rho) = 0$

- Soit $\pi' \subseteq \pi$ une sous-représentation ^{non-nulle}. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\rho)$ tel que $\sigma \subset \pi'$. On montre alors que, forcément, toute la

composante $D_{0,r}(p)$ doit être dans π' (c'est là que l'on utilise ⁽⁷⁾ de manière essentielle F non ramifié sur \mathbb{Q}_p , c'est un résultat de rigidité).

- L'action de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ envoie $D_{0,r}(p)^{I_1}$ vers les I_1 -invariants d'autres composantes. Et on peut montrer en fait qu'on les obtient toutes comme ça (il n'y a pas de facteur direct strict de $D_0(p)$ tel que $D_0(p)^{I_1}$ est stable par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$). En particulier $D_0(p) \subset \pi'$.

- Comme π est engendré par $D_0(p)$, on a $\pi' = \pi$.

Enfin, π est une supersingulière car on a toujours $\dim_E \pi^{I_1} > 2$ (si π n'était pas une supersingulière, on aurait $\dim_E \pi^{I_1} \leq 2$ par Bart-livné).

(ii) On a cette fois $D_0(p) = D_{0,0}(p) \oplus D_{0,1}(p) \oplus \dots \oplus D_{0,f-1}(p) \oplus D_{0,f}(p)$ où chaque $D_{0,i}(p)^{I_1}$ est stable par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$. Pour chaque i , on peut montrer comme au théorème précédent l'existence d'une représentation π_i contenant $D_{0,i}(p)$, de même socle, et engendré par $D_{0,i}(p)$. Lorsque $i = 0, f$, π_i est une série principale irréductible. Lorsque $i \neq 0, f$, la même preuve qu'avant donne que π_i est irréductible et supersingulière (comme pour $D_0(p)$ où p est irréductible, on ne peut couper $D_{0,i}(p)$). \square

Je donne dans la suite en détail le cas $f=2$. ⑧

Lorsque ρ est réductible non scindé, on devrait avoir (au moins génériquement) une suite d'extension $\pi_0 - \pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_f = \pi$.

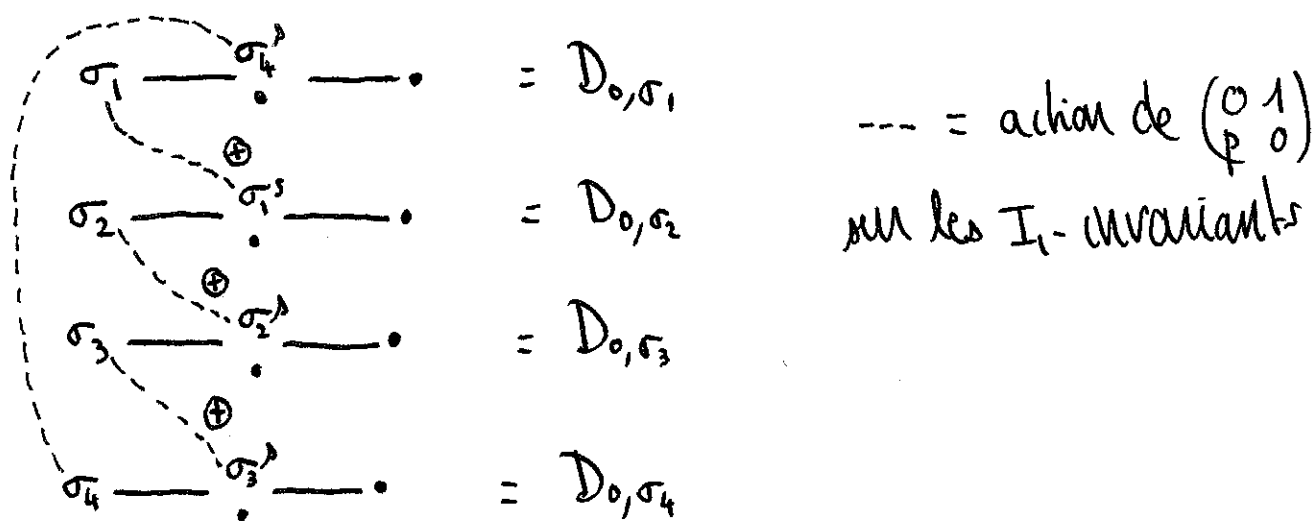
(C'est vrai pour \mathbb{Q}_p). Notons que la conjecture d'unicité implique de (ii) que tout π vérifiant (a), (b), (c) devrait être $\cong \bigoplus_{i=0}^f \pi_i$.

Je donne maintenant en détail le cas $f=2 = [F:\mathbb{Q}_p]$ pour ρ générique semi-simple (avec $\det \rho(p) = 1$).

ρ irréductible: $\rho|_{I(\bar{\mathbb{Q}}_p/F)} = \begin{pmatrix} \omega_2^{r_0+1+p(r_1)} & 0 \\ 0 & \text{conj.} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1 \leq r_0 \leq p-2 \\ 0 \leq r_1 \leq p-3 \end{array}$

$\mathcal{S}(\rho) = \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \}$ $\sigma_1 = (r_0, r_1)$ $\sigma_2 = (r_0-1, p-2-r_1) \otimes \det^*$
 $\sigma_3 = (p-1-r_0, p-3-r_1) \otimes \det^*$ $\sigma_4 = (p-2-r_0, r_1+1) \otimes \det^*$

On trouve pour $D_0(\rho)$: (les \bullet = des poids que je ne précise pas)



On a $D_{0, \sigma_2}^{I_1}$ de dimension 2 engendré par $\sigma_i^{I_1}$ et un relevé de $\sigma_{i-1}^{I_1}$.

La famille $D(\beta, r)$ est ici paramétrée par E^x . A chaque dia-gramme, on peut associer un isomorphisme canonique :

$$\sigma_1^{I_1} \xrightarrow{\sim} \sigma_1^{I_1} \quad (\text{on peut prendre aussi les autres poids})$$

défini comme suit : notons $S_a = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^a \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a \in \{0, \dots, p-1\}$

$$x \in \sigma_1^{I_1} \mapsto \left[S_{p-1-r_0} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \circ S_{p-2-r_1} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \circ S_{r_0} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \circ S_{r_1+1} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \right](x)$$

(cf. dessin précédent). Comme $\dim_E \sigma_1^{I_1} = 1$, cet isomorphisme est la multiplication par un e^h -de E^x .

Si l'on admet la conjecture, on a une famille $\pi(\lambda)$ de représentations de $GL_2(F)$ mod. p (sinon, on a une famille $\pi(\lambda, \dots)$ inconnu).

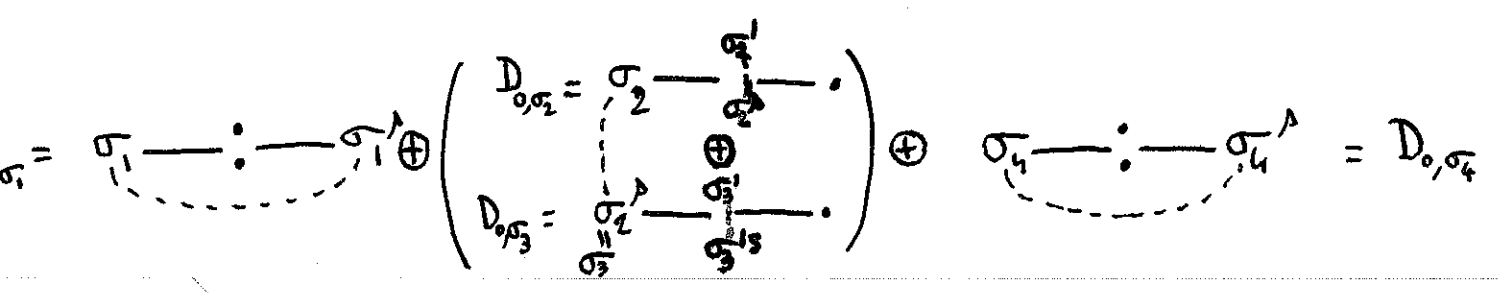
Question : y-a-t'il un λ privilégié ?

p -pandé :

$$\rho \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{r_0+1+p(r_1+1)} nr(\lambda) & 0 \\ 0 & nr(\lambda^{-1}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 \leq r_i \leq p-3 \\ (r_0, r_1) \neq (0,0), (p-3, p-3) \end{array}$$

$$\mathcal{S}(\rho) = \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \} \quad \begin{array}{l} \sigma_1 = (r_0, r_1) \quad \sigma_2 = (p-2-r_0, r_1+1) \otimes \det^* \\ \sigma_3 = (r_0+1, p-2-r_1) \otimes \det^* \quad \sigma_4 = (p-3-r_0, p-3-r_1) \otimes \det^* \end{array}$$

On a pour $D_0(\rho)$:



La famille $D(p,r)$ est ici paramétrée par 4 él^{ts} de E^x .

$$\sigma_1^{I_1} \xrightarrow{\sim} \sigma_1^{I_1} \quad x \mapsto \left(S_0 \circ \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \right) (x) = \lambda_1 x$$

$$\sigma_4^{I_1} \xrightarrow{\sim} \sigma_4^{I_1} \quad x \mapsto \left(S_0 \circ \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \right) x = \lambda_4 x$$

On a 2 isomorphismes $\sigma_2^{I_1} \xrightarrow{\sim} \sigma_2^{I_1} \quad x \mapsto S_{r+1}(\hat{x})$
 $x \mapsto \left(S_{P(R-2r)} \circ \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \right) (\hat{x})$
 $\hat{x} =$ unique relevé de $D_{0, \sigma_2}^{I_1}$.

et il existe un unique $\lambda_2 \in E^x$ tel que $\psi = \lambda_2 \psi'$.

On fait de même avec $\sigma_3^{I_1} \xrightarrow{\sim} \sigma_3^{I_1}$ et on a $\lambda_3 \in E^x$.

Maintenant je voudrais expliquer qu'en fait, il y a des valeurs privilégiées pour les λ_i !

Par analogie au cas $F = \mathbb{Q}_p$, on a déjà $\lambda_1 = \lambda, \lambda_4 = \lambda^{-1}$.

Théorème : Soit η le caractère donnant l'action de I sur $\sigma_2^{I_1}$.
Supposons qu'il existe une forme de Hilbert (quaternionique) de poids $(2, \dots, 2)$ telle que :
1) la représentation galoisienne locale associée à f relève p
2) $\Pi_p(\mathbb{Z})^{K_1} \cong \text{ind}_I^K \tilde{\eta} \leftarrow$ Teichmüller
alors le réseau induit sur $\Pi_p(\mathbb{Z})^{K_1}$ (par la cohomologie) peut être en ss-objet $= \sigma_2$

basé sur un
œuvre = résultat
de T. Gee +
algorithme réseau
sur $\Pi_p(\mathbb{Z})^{K_1}$.
résultat de Gee : un
le poids de $JH(\text{ind } \eta)$
peut être en ss-objet $= \sigma_2$

(entière) se réduit ^{mod. p} sur $D_{0, \sigma_2}(p)$ avec $\lambda_2 = \lambda(-1)^{r_0+1} (r_0+1)$. (H)

On trouve par un argument similaire $\lambda_3 = \lambda^{-1} (-1)^{p-2-r_0} (p-2-r_0)$.

Donc on peut dans ce cas associer à $\begin{pmatrix} \omega_2^{r_0+1+p(r_0+1)} & nr(\lambda) & 0 \\ 0 & nr(\lambda^{-1}) \end{pmatrix}$ le diagramme avec $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda(-1)^{r_0+1} (r_0+1), \lambda_3 = \lambda^{-1} (-1)^{p-2-r_0} (p-2-r_0), \lambda_4 = \lambda^{-1}$.

Donc il y a de ce cas une vraie correspondance ! (modulo la conj. locale d'unicité)
Peut-on généraliser ça ?

PS $\sigma'_2 = (p-1-r_0, p-3-r_1) \quad \sigma'_3 = (r_0+2, r_1)$