Représentations mod. p de $GL_2(F)$ I (2h.)

[I apologize for speaking French. Feel free to ask questions in English, I will (try to) answer in English].

$[F:\mathbb{Q}_p] < \infty$ (non ramifiée).

Il s'agit d'un cours en commun avec V. Paskunas. Le but est de comprendre suffisamment bien les, ou certaines, représentations lisses admissibles de $GL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, où F sera ici une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, pour avoir, un jour, la bonne formulation d'une "correspondance de Langlands" modulo p pour $GL_2(F)$. Comme vous allez le voir, lorsque F n'est pas $\mathbb{Q}_p$, une combinatoire émerge côté $GL_2(F)$ qui grandit "exponentiellement" avec $[F:\mathbb{Q}_p]$. Ce phénomène est complètement nouveau, encore partiellement incompris, et c'est un des buts de ce cours que de donner une introduction à cette combinatoire.

Dans cet exposé, je vais rapidement décrire la situation pour $\mathbb{Q}_p = F$ et montrer que les choses se compliquent lorsque F n'est plus $\mathbb{Q}_p$. Les 2 exposés suivant seront faits par Paskunas qui expli-

-quera une structure appelée "diagramme" qui permet de construire des représentations admissibles de $Gl_2(F)$. Dans le $4^{ème}$ et dernier exposé, je rentrerai à fond dans la combinatoire en décrivant certains diagrammes appelés "diagrammes de Diamond".

1) Je commence par rappeler - brièvement - les caractères fondamentaux de Serre et la classification des représentations de dim. 2 de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Notations : F = ext. finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$, de corps résiduel $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^f}$. Je note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture alg. de F. Son corps résiduel est une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathbb{F}_q$. On a la suite exacte :

$$1 \to \underbrace{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)}_{\text{inertie}} \to Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \twoheadrightarrow Gal(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q) \to 1 .$$

Pour $n \geqslant 1$, on a un homomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) &\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{F}_{p^n}^\times \\ \omega_n : g &\longmapsto \frac{g\left(\sqrt[p^n-1]{\varpi_F}\right)}{\sqrt[p^n-1]{\varpi_F}} \in \mu_{p^n-1}(\overline{\mathbb{Z}}_p) \xrightarrow[\text{red. mod idéal max.}]{\sim} \mathbb{F}_{p^n}^\times . \end{aligned}$$

où ϖ_F est une uniformisante de F (indépend^t des choix).

Soit E un corps algébriquement clos de $\overset{\text{isom. à } \overline{\mathbb{F}}_p}{\text{car. } p}$ (les coefficients), (3)
$= \text{corps résiduel des entiers de } \overline{\mathbb{Q}}_p$

et fixons un plongement $\iota : \underset{\overset{\shortparallel}{\bigcup_n \mathbb{F}_{p^n}}}{\overline{\mathbb{F}}_p} \hookrightarrow E$ une fois pour toute.

Tout caractère continu $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \longrightarrow E^\times$ est une puissance de $\iota \circ \omega_n$ pour un $n \geq 1$ convenable.

Def^t (Serre) : On appelle caractère fondamental (de niveau n) tout caractère $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to E^\times$ qui est une puissance de $\iota\circ\omega_n$. On note ds la suite ω_n au lieu de $\iota \circ \omega_n$ (ι est fixé).

Propriétés :
- Si $m \mid n$, on a $\omega_n^{1+p^m+p^{2m}+\cdots+p^{(\frac{n}{m}-1)m}} = \omega_m$
- ω_n s'étend (de manière non canonique) à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ si et seulement si n divise f : on choisit ϖ_F et la formule est la même que précédemment.
- $\omega_1 =$ car. cyclot. mod. p si F est non ramifié.

Proposition : Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to GL_2(E)$ une représentation continue, alors ρ est de l'une des formes suivantes :

(i) ρ est réductible et $\rho \simeq \begin{pmatrix} \omega_f^{m_1}\,\mathrm{nr}(\alpha) & * \\ 0 & \omega_f^{m_2}\,\mathrm{nr}(\beta) \end{pmatrix}$

où $\mathrm{nr}(x) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q) \longrightarrow E^\times$

$(x \mapsto x^{p^{-f}}) = \mathrm{Frob}_q \text{ géom} \longmapsto x$

(ii) ρ est irréductible et $\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{m} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{qm} \end{pmatrix}$

où $q+1 \nmid m$.

On utilise que $\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)}$ est dans les 2 cas réductibles, $(\rho|_{I_1})^{ss} \simeq \chi_1 \oplus \chi_2$, que l'on doit avoir $(\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)})^{ss} \simeq \chi_1 \oplus \chi_2$ avec $\{\chi_1, \chi_2\} = \{\chi_1^q, \chi_2^q\}$ (car la représentation doit s'étendre à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$) et que χ_i s'étend à $G(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ ssi $\chi_i = \omega_f^* = \chi_i^q$.

② Si r et j sont des entiers ≥ 0, je note $(\mathrm{Sym}^r E^2)^{\mathrm{Fr}^j}$ la représentation de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\bigoplus_{i=0}^{r} E\, x^{r-i} y^i$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x^{r-i} y^i = (a^{p^j} x + c^{p^j} y)^{r-i} (b^{p^j} x + d^{p^j} y)^i$$

où $a^{p^j}, b^{p^j}, c^{p^j}, d^{p^j} \in \mathbb{F}_q \xrightarrow{\iota} E$.

<u>Proposition:</u> Les représentations (continues) irréductibles de $K = GL_2(\mathcal{O}_F)$ ou de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ sur E sont exactement les représentations

$$(\mathrm{Sym}^{r_0} E^2) \otimes (\mathrm{Sym}^{r_1} E^2)^{\mathrm{Fr}} \otimes \cdots \otimes (\mathrm{Sym}^{r_{f-1}} E^2)^{\mathrm{Fr}^{f-1}} \otimes \det{}^m \quad (*)$$

avec $0 \leq r_i \leq p-1$ et où K agit via $K \twoheadrightarrow GL_2(\mathbb{F}_q)$.

Cas particulier d'un thm général (dû à Steinberg). On utilise Brauer pour compter les repr. irréd. de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ + le fait (pour K) que $\mathrm{Ker}(K \twoheadrightarrow GL_2(\mathbb{F}_q))$ agit trivialement car c'est un pro-p groupe et car la représentation est irréductible.

Je note $(r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \det^m$ la représentation $(*)$. On appelle <u>poids</u> ⑤
une telle représentation irréductible.

3) Je fixe maintenant une uniformisante ϖ_F de F et ne considère que des représentations de $GL_2(F)$ ou $KF^\times$ telles que $\begin{pmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix}$ agit trivialement. En particulier, je peux étendre à $KF^\times$ les représentations $(r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \det^m$. Je note $G = GL_2(F)$.

Soit σ une représentation de dim. finie de K sur E, étendue à $KF^\times$. Je note V_σ le E-ev. sur lequel $KF^\times$ agit via σ.

Soit $\operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma := \{ f : G \to V_\sigma,\ f$ est à support compact modulo $F^\times$ et $f(kg) = \sigma(k) f(g)$ si $(k,g) \in KF^\times \times G \}$

muni de l'action lisse de G : $(gf)(g') := f(g'g)$.

<u>Réciprocité de Frobenius</u>: $\operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma, \pi) = \operatorname{Hom}_{KF^\times}(\sigma, \pi|_{KF^\times})$

$\varphi \longmapsto (v \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{KF^\times} v))$

π = représentation lisse de G sur un E-e.v.

En particulier $\operatorname{End}_G(\operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma) = \operatorname{Hom}_{KF^\times}(\sigma, \operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma|_{KF^\times})$

$$\xrightarrow{\sim} \{ \varphi : G \to \operatorname{End}_E(V_\sigma),\ \varphi(k_1 g k_2) = \sigma(k_1) \circ \varphi(g) \circ \sigma(k_2) \}$$

Le deuxième isom. est donné par $\psi \longmapsto (\varphi : g \mapsto (v \mapsto \psi(v)(g)))$.

Proposition (Barthel-Livné): Supposons σ irréductible, alors $\operatorname{End}_G(\operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma) = E[T]$ où T correspond à l'unique $\varphi : G \to V_\sigma$ comme ci-dessous

telle que φ est à support dans $KF^\times \begin{pmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K$ et
$\varphi\begin{pmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\big(P(x,y)\big) = P(0,y)$ $\quad \big(P(x,y) = P_0(x,y)\otimes\cdots\otimes P_{f-1}(x,y)\big)$

Il existe des formules explicites pour T que je ne donne pas ici.

<u>Définition</u> : Une représentation lisse de G sur un E-e.v. est dite admissible si ses invariants sous n'importe quel sous-groupe ouvert compact de G forment un E-e.v. de dim. finie.

Soit $I_1 \subset K$ le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures modulo ϖ_F, il suffit en fait de vérifier que π^{I_1} est de dimension finie.

<u>Proposition</u> (Barthel-Livné) : Soit π une représentation lisse (admissible) irréductible de G (sur E) telle que ϖ_F agit par 1. Alors il existe (σ, λ) où $\lambda \in E$ et σ est une repr. irréd. de $KF^\times$ sur E tel que π est un quotient de $\dfrac{\operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma}{T-\lambda}$.

$\lambda \neq 0$ essentiell^t : Steinb. ou série principale

Rq : Barthel-Livné prouvent ce résult. m̂ si π n'est pas admissible mais a un carac. central et si on a $\operatorname{ind}\sigma \twoheadrightarrow \pi$.

<u>Preuve</u> : Il est facile de trouver σ tel que $\operatorname{Hom}_{KF^\times}(\sigma, \pi) \neq 0$. C'est un E-ev de dim. finie (car π est admissible) sur lequel agit T par $\operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma \xrightarrow{T} \operatorname{ind}_{KF^\times}^G \sigma \longrightarrow \pi$. T a donc une valeur propre λ sur cet espace pour un vecteur propre qui fournit $\operatorname{ind}\sigma/_{T-\lambda} \twoheadrightarrow \pi$. $\square$

<u>Définition</u> (Barthel-Livné) : π (lisse, adm. irréd) est dite supersingulière si π est un quotient de $\frac{\mathrm{ind}\,\sigma}{T}$.

On ne sait pas classer les supersingulières en général. Si $F \neq \mathbb{Q}_p$, il y en a énormément.

④ Je suppose ici $F = \mathbb{Q}_p$ et $\varpi_F = p$.

<u>Théorème</u> (Barthel-Livné, B.) Les représentations lisses irréductibles admissibles de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E sont les suivantes :

On peut enlever admissible à cond. de rajouter "avec un car. central".

(i) les caractères (dim. 1) $\eta \circ \det$ $\quad (\eta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times)$.

(ii) les "séries principales" $\quad \dfrac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r E^2}{T - \lambda} \otimes \eta \circ \det$

où $0 \leq r \leq p-1$, $\lambda \in E^\times$ et $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p-1, \pm 1)\}$.

(iii) les "séries spéciales" $\mathrm{St} \otimes \eta \circ \det$ où

$$\mathrm{St} = \{ f : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \to E \} / \text{constantes} \quad \text{avec} \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f \right)(z) = f\left(\frac{az + c}{bz + d} \right)$$

(iv) les représentations (supersingulières) $\quad \dfrac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r E^2}{T} \otimes \eta \circ \det \quad (0 \leq r \leq p-1)$.

<u>Idée de preuve</u> : Il n'est pas difficile de vérifier que les représentations (ii) et (iii) sont irréductibles et, si l'on admet (iv), on voit que le théorème vient essentiellement de la proposition précédente. Le point principal est donc (iv), qui d'ailleurs utilise de manière essentielle que $F = \mathbb{Q}_p$. Il y a au moins 4 preuves de ce résultat :

ma preuve initiale consistant à calculer $\left(\dfrac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r}{T}\right)^{I_1}$ explicitement

une preuve due à Colmez/Berger utilisant les (φ,Γ)-modules (restr. au Borel inféd.)

une preuve due à Ollivier (variante de ma preuve)

une preuve due à Emerton (variante de Colmez/Berger sans (φ,Γ)-modules).

En fait on peut calculer complètement $\dfrac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r}{T}\Big|_{K\mathbb{Q}_p^\times}$ si $p>2$. On trouve le résultat suivant :

extensions non scindées de $K\mathbb{Q}_p^\times$-repr's.

$$\frac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r}{T}\Big|_{K\mathbb{Q}_p^\times} = \begin{cases} \mathrm{Sym}^r - \mathrm{Sym}^{p-3-r}\otimes\det^{r+1} - \mathrm{Sym}^{r+2}\otimes\det^{p-2} - \mathrm{Sym}^{p-5-r}\otimes\det^{r+2} - \mathrm{Sym}^{r+4}\otimes\det - \cdots \\ \oplus \\ \mathrm{Sym}^{p-1-r}\otimes\det^r - \mathrm{Sym}^{r-2}\otimes\det - \mathrm{Sym}^{p+1-r}\otimes\det^{r-1} - \mathrm{Sym}^{r-4}\otimes\det^2 - \mathrm{Sym}^{p+3-r}\otimes\det^{r-2} - \cdots \end{cases}$$

avec : si r pair ($\Leftrightarrow p-1-r$ pair) :

$$\cdots - \mathrm{Sym}^{p-5}\otimes\det^{\frac{r}{2}+2} - \mathrm{Sym}^2\otimes\det^{\frac{r}{2}-1} - \mathrm{Sym}^{p-3}\otimes\det^{\frac{r}{2}+1} - \begin{matrix}\mathrm{Sym}^0\otimes\det^{r/2}\\ \oplus \\ \mathrm{Sym}^{p-1}\otimes\det^{r/2}\end{matrix} - \mathrm{Sym}^{p-3}\otimes\det^{\frac{r}{2}+1} - \text{idem} \cdots$$

si r impair :

$$\cdots - \mathrm{Sym}^{p-4}\otimes\det^{\frac{r-1}{2}+2} - \mathrm{Sym}^1\otimes\det^{\frac{r-1}{2}} - \mathrm{Sym}^{p-2}\otimes\det^{\frac{r-1}{2}+1} - \mathrm{Sym}^{p-2}\otimes\det^{\frac{r-1}{2}+1} - \mathrm{Sym}^1\otimes\det^{\frac{r-1}{2}}\cdots$$

De plus Sym^r et $\mathrm{Sym}^{p-1-r}\otimes\det^r$ engendrent tout sous G. On déduit alors que la repr's. est irréductible (toute sous-représent. de G contient soit Sym^r, soit Sym^{p-1-r}) et aussi que :

$$\pi^{K_1} = \begin{matrix}\mathrm{Sym}^r - \mathrm{Sym}^{p-3-r}\\ \oplus \\ \mathrm{Sym}^{p-1-r} - \mathrm{Sym}^{r-2}\end{matrix}$$

(je laisse tomber les twists)

où $K_1 = \mathrm{Ker}(K \twoheadrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p))$.

$$\pi^{I_1} = (\mathrm{Sym}^r)^{I_1} \oplus (\mathrm{Sym}^{p-1-r})^{I_1} \qquad \square$$

J'énonce maintenant la correspondance semi-simple pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Je normalise l'application $r_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \twoheadrightarrow \widehat{F^\times}$ de telle sorte que les Frob. géom. s'envoient sur les uniformisantes. ⑨

$r \in \{0, \dots, p-1\}$, $\lambda \in E^\times$, $[p-3-r]$ = unique entier ds $\{0, \dots, p-2\}$ congru à $p-3-r$ mod. $p-1$.

$$\pi = \frac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r}{T} \longleftrightarrow \rho \text{ irr}, \ \rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{r+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(r+1)} \end{pmatrix}, \ \det \rho = \omega_1^{r+1}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^r}{T-\lambda}\right)^{ss}}_{\substack{\simeq \\ \mathrm{ind}_B^G \mathrm{nr}(\lambda^{-1}) \otimes \omega_1^r \mathrm{nr}(\lambda)}} \underset{\pi}{\overset{\|}{\oplus}} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{Sym}^{[p-3-r]}}{T-\lambda^{-1}}\right)^{ss} \otimes \omega_1^{r+1} \circ r_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \circ \det}_{\substack{\| \\ \mathrm{ind}_B^G \omega_1^{r+1} \mathrm{nr}(\lambda) \otimes \mathrm{nr}(\lambda^{-1})}} \longleftrightarrow \rho \simeq \begin{pmatrix} \omega_1^{r+1} \mathrm{nr}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathrm{nr}(\lambda^{-1}) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{nr}(x) : p \mapsto x$

<u>Remarques</u> : (i) cette correspondance peut être rendue fonctorielle (contravariante) grâce aux (φ, Γ)-modules : on peut par exemple construire directement le (φ, Γ)-module de ρ à partir de π.

(ii) on peut également tenir compte des extensions (ds le cas réductible) des 2 côtés : pour (r, λ) suffisamment générique au moins, il existe une unique extension non-scindée

$$\frac{\mathrm{ind}\, \mathrm{Sym}^r}{T-\lambda} \ — \ \frac{\mathrm{ind}\, \mathrm{Sym}^{p-3-r}}{T-\lambda^{-1}} \otimes \omega_1^{r+1}$$ qui, via les (φ, Γ)-modules

comme en (i), donne l'unique extension non scindée $\begin{pmatrix} \omega_1^{r+1} \mathrm{nr}(\lambda) & * \\ 0 & \mathrm{nr}(\lambda^{-1}) \end{pmatrix}$.

⑤ Si F n'est plus $\mathbb{Q}_p$, mais est non-ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, il n'est plus vrai que $\frac{\mathrm{ind}\, \sigma}{T}$ (σ irréductible) est irréductible. C'est même une représentation de longueur infinie. On peut aussi montrer qu'elle a une infinité de quotients irréductibles admissibles. On voit donc que la généralisation directe de la correspondance à F non $\mathbb{Q}_p$ (dans le cas ρ irréductible au moins) pose problème.

On va prendre le problème différemment.

Une conséquence des résultats précédents lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ est que, si $\rho|_{I(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{r+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(r+1)} \end{pmatrix}$, il lui correspond $\pi(\rho) = \dfrac{\mathrm{ind}\, \mathrm{Sym}^r E^2}{T}$ qui vérifie les 2 conditions :

(i) $\mathrm{soc}_K \pi(\rho) = \mathrm{Sym}^r E^2 \oplus \mathrm{Sym}^{p-1-r} E^2 \otimes \det^r$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ échange les 2 E-ev de dim 1 $(\mathrm{Sym}^r E^2)^{I_1}$ et $(\mathrm{Sym}^{p-1-r} \otimes \det^r)^{I_1}$.

De plus, on peut montrer (en utilis. la classif.) que si π est une représentation lisse admissible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ telle que :

(i) $\mathrm{soc}_K \pi = \mathrm{Sym}^r E^2 \oplus \mathrm{Sym}^{p-1-r} E^2 \otimes \det^r$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ échange les 2 espaces de I_1-invariants

(iii) π est engendrée (sous GL_2) par $\mathrm{soc}_K \pi$

alors $\pi \simeq \pi(\rho)$ (en particulier est irréductible).

Il sera plus utile de remplacer (i) par (i)' :

$$\pi^{K_1} = \begin{matrix} \mathrm{Sym}^r - \mathrm{Sym}^{p-3-r} \\ \oplus \\ \mathrm{Sym}^{p-1-r} - \mathrm{Sym}^{p-2} \end{matrix}$$

Au lieu de chercher d'emblée ~~une~~ représentation de G associée à ρ, on peut donc dans un premier temps chercher à généraliser la donnée : "$\mathrm{Sym}^r \oplus \mathrm{Sym}^{p-1-r} \otimes \det^r$ avec une action de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ sur les I_1-invariants".

C'est ce que l'on va faire dans la suite, en formalisant un peu plus.

(6) Une des premières tâches est d'essayer de comprendre ce qui doit généraliser $\mathrm{Sym}^r \oplus \mathrm{Sym}^{p-1-r} \otimes \det^r$, ie le futur K-socle. Ceci a été fait par Buz., Diam. et Jarvis (et Gee) et je l'explique brièvement maintenant. Revenons à $F = \mathbb{Q}_p$. Le "premier" poids associé à ρ tq $\rho|_{I(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \simeq \omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$ est $\mathrm{Sym}^r E^2$:

$$\mathrm{Sym}^r E^2 \longleftrightarrow \omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}.$$

Pour le second poids $\mathrm{Sym}^{p-1-r} E^2 \otimes \det^r$, on a envie d'écrire en appliquant la même règle et en twistant :

$$\mathrm{Sym}^{p-1-r} E^2 \otimes \det^r \longleftrightarrow \left(\omega_2^{(p-1-r)+1} \oplus \omega_2^{p((p-1-r)+1)}\right) \otimes \omega_1^r$$

$$\simeq \omega_2^{p-r+(p+1)r} \oplus \omega_2^{p(p-r)+(p+1)r}$$

$$\simeq \omega_2^{p(r+1)} \oplus \omega_2^{r+1}$$

on retrouve la même restriction à l'inertie, mais en "échangeant" ω_2 et ω_2^p. On voit donc que les 2 poids Sym^r et $\mathrm{Sym}^{p-1-r} \otimes \det^r$ "correspondent" aux différentes façons d'écrire $\rho|_{I(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$.

Cette approche se généralise à F non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ comme suit.

<u>Définition</u> (B.-D.-J.) Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{Gl}_2(E)$ une représentation continue irréductible. L'ensemble $\mathcal{D}(\rho)$ des poids de Diamond de ρ est l'ensemble des poids $\{(r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \det^m\}$ où les r_i et m sont tels qu'il existe $S \subseteq \{0, \dots, f-1\}$ vérifiant :

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{i\in S} p^i(r_i+1) + \sum_{i\notin S} q p^i(r_i+1)} & 0 \\ 0 & \text{conj.} \end{pmatrix} \otimes \omega_f^m .$$

Ex : Si $[F:\mathbb{Q}_p] = 2$ (ie $F = \mathbb{Q}_{p^2}$) et $\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^2})} \simeq \begin{pmatrix} \omega_4^{r_0+1+p(r_1+1)} & 0 \\ 0 & \omega_4^{p^2(\;)} \end{pmatrix}$,

on trouve :

$S = \{0,1\}$ $\quad (r_0, r_1)$ $\quad 0 \leq r_1 \leq p-3$

$S = \{0\}$ $\quad (r_0-1, p-2-r_1) \otimes \det^{p(r_1+1)}$ $\quad 1 \leq r_0 \leq p-2$

$S = \{1\}$ $\quad (p-2-r_0, r_1+1) \otimes \det^{r_0-p}$

$S = \emptyset$ $\quad (p-1-r_0, p-3-r_1) \otimes \det$

Lorsque ρ (irréductible) est "générique", on a $|\mathcal{D}(\rho)| = 2^f$.

La définition de $\mathcal{D}(\rho)$ s'étend à ρ réductible, mais il faut distinguer ρ semi-simple ou non.

Lorsque ρ est semi-simple (réductible), $\mathcal{D}(\rho)$ est l'ensemble des poids $\{(r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \det^m\}$ tels qu'il existe $S \subseteq \{0, \dots, f-1\}$ avec :

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{i\in S}(r_i+1)p^i} & 0 \\ 0 & \omega_f^{\sum_{i\notin S}(r_i+1)p^i} \end{pmatrix} \otimes \omega_f^m$$

et on a là encore $|\mathcal{D}(\rho)| = 2^f$ dans le cas générique.

Ex : $F = \mathbb{Q}_p$, $\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \simeq \begin{pmatrix} \omega_1^{r_0+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$S = \{0\}$ $\quad \mathrm{Sym}^{r_0} E^2$

$S = \emptyset$ $\quad \mathrm{Sym}^{p-3-r_0} E^2 \otimes \det^{r_0+1}$ $\quad (0 \leq r_0 \leq p-3)$

et on voit qu'on retrouve bien le K-socle de $\pi(\rho)$ dans ce cas.

Si ρ est non-scindé, on a $\mathcal{S}(\rho) \not\subseteq \mathcal{S}(\rho^{ss})$, je ne considérerai pas ce cas ici.

Un mot sur le cas réductible non scindé (relevés cristallins etc.) :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_f^{r_0+1}\varphi(\varepsilon_f)^{r_1+1}\cdots\varphi^{f-1}(\varepsilon_f)^{r_{f-1}+1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad * \text{ cristallin}$$

en général :

$$\begin{pmatrix} \prod_{i\in S}\varphi^i(\varepsilon_f)^{r_i+1}\prod_i\varphi^i(\varepsilon_f)^{m_i} & * \\ 0 & \prod_{i\notin S}\varphi^i(\varepsilon_f)^{r_i+1}\prod_i\varphi^i(\varepsilon_f)^{m_i} \end{pmatrix}$$ avec $*$ cristalline.

et $\sum_i p^i m_i = m$.

$\left[\ \varepsilon_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \twoheadrightarrow \mathbb{F}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \text{ tq } \varepsilon_f|_{\mathcal{O}_F^\times} \text{ relève } \omega_f \right]$